

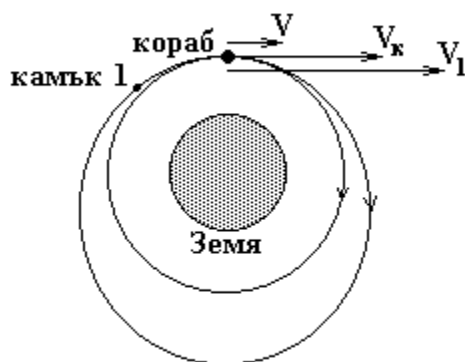
IV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
ПОДБОРЕН КРЪГ
ЗА ИЗБИРАНЕ НА БЪЛГАРСКИЯ НАЦИОНАЛЕН ОТБОР
ЗА УЧАСТИЕ В VI МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
3 август 2001 г., Стара Загора

Ученици 16 – 18 год.

1 задача. Участници в школата за подготовка за Международната олимпиада по астрономия излизат с космически кораб от космодрума в лагера на Старозагорската обсерватория. Корабът е изведен в кръгова орбита около Земята. Търсачи на силни усещания от Велико Търново и Сливен излизат в открития космос, без да се отделят от кораба, и хвърлят камъни, взети от пещерата недалеч от лагера. Един камък е хвърлен напред, по посока на движението на кораба, друг – назад, в обратната посока, а трети – настрани, перпендикулярно на орбиталната равнина. Корабът прави една обиколка около Земята и се връща в същата точка. В какво положение ще са трите камъка относно кораба в този момент? Обяснете вашия отговор и го пояснете с чертеж.

Решение:

Означаваме с v_k скоростта на кораба относно Земята, с v скоростта на изхвърляне на камъните относно кораба, с v_1 , v_2 и v_3 – скоростите на трите камъка относно Земята в момента на изхвърляне. Корабът се движи по кръгова орбита със скорост $v_k = (GM_{\oplus} / r)^{1/2}$, където G е гравитационната константа, $M_{\oplus}$ е масата на Земята, r е радиусът на орбитата на кораба.



Фиг.1

В момента на изхвърлянето на първия камък (Фиг.1), неговата скорост относно Земята ще бъде:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}$$

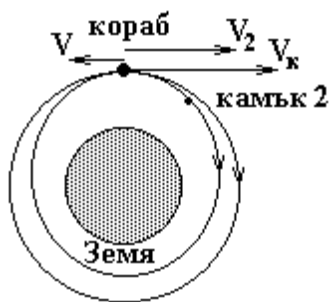
$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_k| + |\mathbf{v}| > |\mathbf{v}_k|$$

Понеже скоростта на камъка е по-голяма от кръговата скорост v_k , то той ще се движи по елиптична орбита с перигей точката на изхвърляне. Голямата полуос на тази елипса a_1 е по-голяма от радиуса r на орбитата на кораба. Съгласно III закон на Кеплер:

$$a_1^3 / T_1^2 = r^3 / T_k^2$$

където T_1 и T_k са съответно орбиталните периоди на камъка и кораба. Следователно $T_1 > T_k$ и това означава, че след една обиколка на кораба по орбитата камъкът няма да е завършил една обиколка по своята орбита. В момента на връщане на кораба в същата точка, камъкът ще се окаже на известно разстояние зад него и малко по-високо над земната повърхност в сравнение с кораба (положение 1 на Фиг.1). Разстоянието ще бъде малко, понеже скоростта на кораба е от порядъка на километри в секунда, а скоростта на изхвърляне на камъка относно кораба е от порядъка на метри в секунда и следва, че:

$$\Delta T = T_1 - T_k \ll T_k$$



Фиг. 2

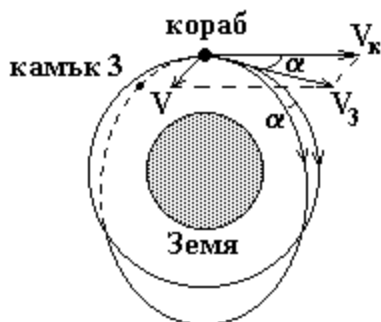
Началната скорост на втория камък (Фиг.2) относно Земята ще бъде:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}$$

$$|\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_k| - |\mathbf{v}| < |\mathbf{v}_k|$$

Камъкът ще се движи по елипса с апогей в точката на изхвърляне. Голямата полуос на тази елипса ще бъде $a_2 < r$. Следователно орбиталният период на камъка ще е $T_1 < T_k$. Това значи, че след една обиколка и завръщане на кораба в същата точка, камъкът ще е успял да направи малко

повече от една обиколка по своята орбита и ще се окаже малко пред кораба и малко по-близо до Земята (положение 2 на Фиг.2).



Фиг. 3

Скоростта на третия камък (Фиг.3) относно Земята ще бъде:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}$$

От Питагоровата теорема:

$$|\mathbf{v}_1| = (|\mathbf{v}_k|^2 + |\mathbf{v}|^2)^{1/2}$$

Понеже $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_k$, равнината на орбитата на камъка ще сключва ъгъл α с орбиталната равнина на кораба:

$$\cos \alpha = v_k / v_3$$

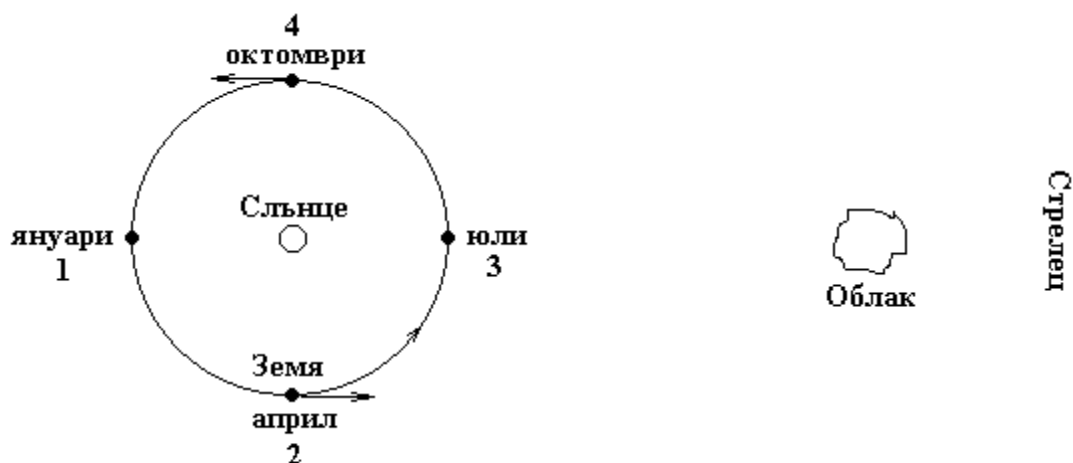
Освен това $|\mathbf{v}_3| > |\mathbf{v}_k|$ и орбитата ще е елипса с

перигей в точката на изхвърляне и голяма полуос $a_3 > r$. Орбиталният период на камъка ще е $T_3 > T_k$. След една обиколка на кораба камъкът ще се окаже малко назад и отклонен вляво (в случай, че е изхвърлен надясно) от кораба, ако гледаме по посока на движението на кораба (положение 3 на Фиг.3). Понеже $|\mathbf{v}_3| < |\mathbf{v}_1|$, то разликата между T_3 и T_k ще е по-малка отколкото разликата между T_1 и T_k и третият камък ще е малко по-близо до кораба, отколкото първия камък. Също така $a_3 < a_1$.

2 задача. Хладен космически облак се изучава чрез радионаблюдения на дължината на известната 21-сантиметрова линия на неутралния водород. Лабораторната честота на тази линия е $\nu_0 = 1420.4$ MHz. Наблюдаваната честота на излъчването на облака се изменя от $\nu_1 = 1419.31$ MHz до $\nu_2 = 1419.40$ MHz с период една година. Облакът се намира в съзвездието Стрелец. Приблизително по кое време на годината честотата на излъчването на облака е минимална и кога – максимална? Каква е лъчевата скорост на облака? Ъгловият размер на облака е $\delta = 4'.3$, а разстоянието до него – 10000 pc. Температурата му е 15 K. Оценете общата мощност на излъчване на облака в единици слънчева светимост.

Решение:

Облакът е в Стрелец, т.е. близо до равнината на еклиптиката. Периодичното изменение на честотата му на излъчване се дължи на ефекта на Доплер, предизвикан от орбиталното движение на Земята около Слънцето.



Фиг.4

Слънцето е в зодиакалния знак Стелец през декември, следователно то е, или би трябвало да е в съзвездие Стрелец през януари, при положение 1 на Земята на Фиг.4, ако се гледа откъм северния полюс на земното кълбо. Поради орбиталното си движение около Слънцето, Земята се "приближава" с най-голяма лъчева компонента на скоростта към облака в началото на пролетта (положение 2) и тогава наблюдаваната честота на излъчването на облака е максимална. Аналогично, в началото на есента наблюдаваната честота е минимална.

Лъчевата скорост на движение на облака относно Земята в първия случай може да се намери по формулата:

$$V_1 / c = \Delta v / v_0 \quad \Rightarrow \quad V_1 / c = (v_0 - v_1) / v_0$$

където c е скоростта на светлината.

$$V_1 = c(v_0 - v_1) / v_0$$

$$V_1 \approx 230 \text{ km/s}$$

Във втория случай получаваме:

$$V_2 = c(v_0 - v_2) / v_0$$

$$V_2 \approx 170 \text{ km/s}$$

Скоростта на движение на Земята по орбитата ѝ около Слънцето е:

$$V_{\oplus} = 2\pi \cdot 1 \text{ AU} / 1 \text{ год.} \approx 30 \text{ km/s}$$

Лъчевата скорост на движение на облака, коригирана за движението на Земята, или все едно, лъчевата му скорост относно Слънцето, е:

$$V = V_1 - V_{\oplus} = V_2 - V_{\oplus} = 200 \text{ km/s}$$

Понеже v_1 и v_2 са по-малки от v_0 , следва че облакът се отдалечава от нас.

Разстоянието до облака е $r = 10000$ рс. Линейният му размер е:

$$D = r \delta [\text{rad}]$$

Ако смятаме облака за сферичен, радиусът му е:

$$R = D / 2 = r \delta / 2.$$

Температурата на облака е T , мощността на излъчване е:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

където σ е константата на Стефан-Болцман. Ако $L_{\odot}$ е светимостта на Слънцето, то:

$$L / L_{\odot} = 4\pi R^2 \sigma T^4 / 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$$

$$L / L_{\odot} = (r \delta / 2 R_{\odot})^2 (T / T_{\odot})^4$$

$$L \approx 3.3 \times 10^6 L_{\odot}$$

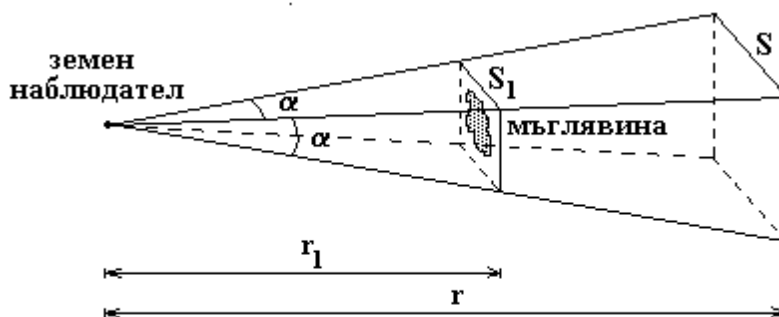
Резултатът е впечатляващ. Въпреки крайно ниската температура, мощността на излъчване на облака е над три милиона пъти по-голяма от тази на Слънцето. Така още веднъж добиваме представа за гиганстките космически мащаби. Необходимо е да се поясни, обаче, че това е приблизителна оценка, валидна за случая, когато излъчваната в космоса енергия идва главно от тънък слой на повърхността на облака. Ако облакът няма достатъчно голяма оптична плътност, то за получаването на по-коректна оценка, е нужно да се интегрира по излъчването, идващо от целия обем на облака.

3 задача. Направена е снимка на част от звездното небе, съдържаща тъмна космическа мъглявина. Преброяват се звездите в различни участъци от снимката. В област на фона на мъглявината са преброени 10 пъти по-малко звезди, отколкото в друга област от снимката, намираща се встрани от мъглявината. Двете области са с еднаква площ. Приемаме, че мъглявината е напълно непрозрачна, звездите са равномерно разпределени в пространството, всички звезди имат абсолютна звездна величина 5^m , и видимата звездна величина на най-слабите звезди, заснети на снимката, е 15^m . Пресметнете приблизително разстоянието до мъглявината.

Решение:

Означаваме с M абсолютната звездна величина на звездите и с m видимата звездна величина на най-слабите звезди на снимката. За да намерим разстоянието r до най-слабите звезди, използваме формулата:

$$\begin{aligned} 5 \lg r - 5 &= m - M \\ \lg r &= (m - M + 5) / 5 \\ \lg r &= 3 \\ r &= 1000 \text{ pc} \end{aligned}$$



Фиг.5

Звездите, заснети във всяка част от снимката, принадлежат към област от пространството с форма на пирамида и определен обем (Фиг.5). Земният наблюдател се намира във върха на тази пирамида, а основата ѝ е част от сфера с радиус, равен на разстоянието до най-далечните звезди, които са заснети. Звездите са равномерно разпределени в пространството. Следователно броят на звездите в дадена част от снимката е пропорционален на обема на съответната пирамида, който тази част обхваща. Обемът на пирамида с височина h и площ на основата S е:

$$V = hS / 3$$

Нека за простота приемем, че областите от снимката имат малки ъглови размери и можем да пренебрегнем сферичната кривина на основите на съответните

пирамиди от пространството, които те обхващат. Също така нека приемем, че изследваните области от снимката са квадрати, с ъглова дължина на страните α . Тогава за височини на пирамидите можем да приемем разстоянията до най-далечните звезди, видими в областите. В област на фона на облака това е r_1 – разстоянието до облака (понеже той е напълно непрозрачен), а в област извън облака е r – разстоянието до звездите от 15^m . Линейните размери на страните на основите на двете пирамиди са αr_1 и αr , площите на тези основи са $S_1 = (\alpha r_1)^2$ и $S = (\alpha r)^2$. Обемите на двете пирамиди са:

$$V_1 = r_1(\alpha r_1)^2 / 3 = \alpha^2 r_1^3 / 3$$

$$V = r(\alpha r)^2 / 3 = \alpha^2 r^3 / 3$$

Отношението на броя на звездите в тях е:

$$N_1 / N = V_1 / V = (r_1 / r)^3$$

Оттук, като имаме предвид, че $N_1 / N = 10$, за разстоянието до облака получаваме:

$$r_1 = r (N_1 / N)^{1/3}$$

$$r_1 \approx 460 \text{ pc}$$

Дори и без пренебрегване на сферичната кривина на основите на въпросните пирамиди, и ако формата на основите им е произволна, при използване на точната формула за обем на сектор от сфера, пак бихме получили, че обемите им са пропорционални на третата степен на съответните разстояния, така че резултатът от решението би бил същият.

Практическа задача. Върху фотографска плака с определена звездна област са идентифицирани 21 звезди. От каталог са взети фотографските звездни величини на звездите. С помощта на микрофотометър са определени относителните плътности на почернението (Δ) на образите на звездите, представени в таблицата.

¹	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m_{ph}	0,55	1,37	1,52	1,79	2,50	2,85	2,32	3,57	3,86	4,34	4,66
Δ	110	131	144	153	186	242	272	304	362	413	462

¹	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
m_{ph}	4,95	5,21	5,56	5,75	5,93	6,39	6,67	6,88	7,06	7,78
Δ	522	598	680	715	785	826	911	943	952	960

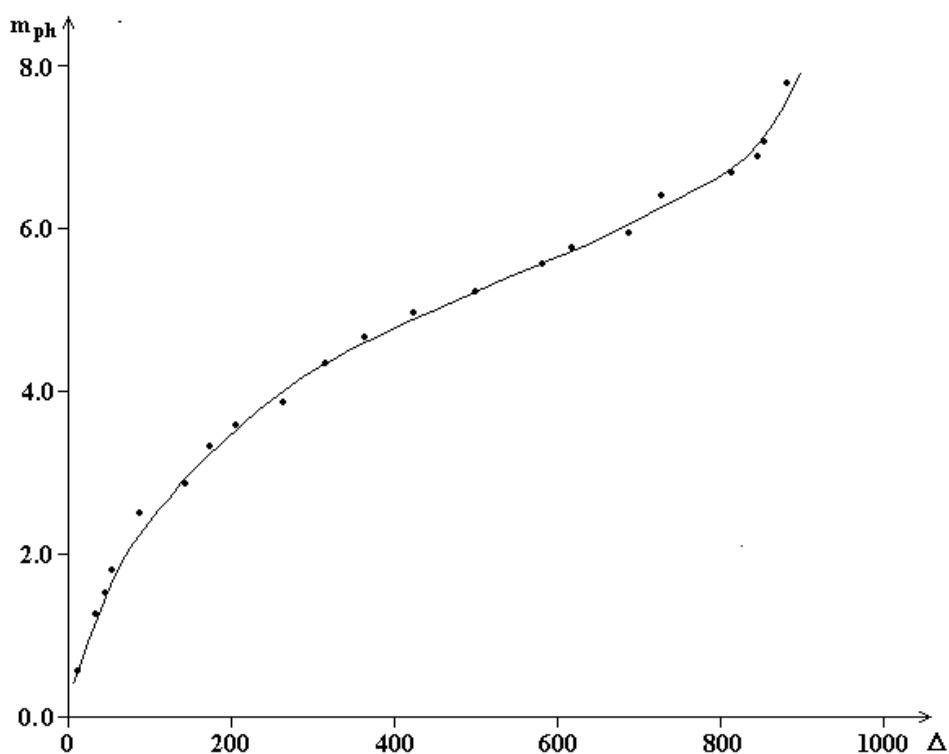
Определете звездните величини на четири други звезди, за които почернението е $\Delta_A = 289$, $\Delta_B = 510$, $\Delta_C = 520$, $\Delta_D = 792$. За звездите В и С са определени визуалните звездни величини и те са $m_A = 4^m.47$ и $m_B = 5^m.82$. Направете сравнение с фотографските им звездни величини и обяснете разликите. Какъв извод за астрофизичните характеристики на тези звезди можем да направим?

Решение:

По данните от таблицата построяваме графика на зависимостта $m_{ph}(\Delta)$. По нея графично определяме фотографските звездни величини на четирите звезди:

Звезда	A	B	C	D
Δ	289	510	520	792

m_{ph}	$3^{m.5}$	$4^{m.8}$	$4^{m.9}$	$6^{m.1}$
----------	-----------	-----------	-----------	-----------



От определените вече фотографски звездни величини на звездите В и С и дадените визуални звездни величини намираме цветните индекси на тези звезди:

$$I_B = m_{phB} - m_B = -0.33$$

$$I_C = m_{phC} - m_C = +0.92$$

Както е известно, фотографските емулсии обикновено са по-чувствителни към синята част на спектъра, отколкото окото. Щом звездата В има фотографска звездна величина, по-малка от видимата, то значи, че тя е по-ярка в по-късовълновата част от спектъра, отколкото във видимата, т.е. по-дълговълновата част от спектъра. За звездата С важи обратното съотношение. Следователно най-малкото, което можем да кажем, е че съгласно закономерностите, свързани със спектъра на абсолютно черно тяло и неговата температура, звездата В е по-гореща от С. Съдейки по стойностите на цветните индекси, звездата В е ярък синкаво-бял гигант от клас В, а звездата С е жълто джудже вероятно от клас G, подобно на нашето Слънце.